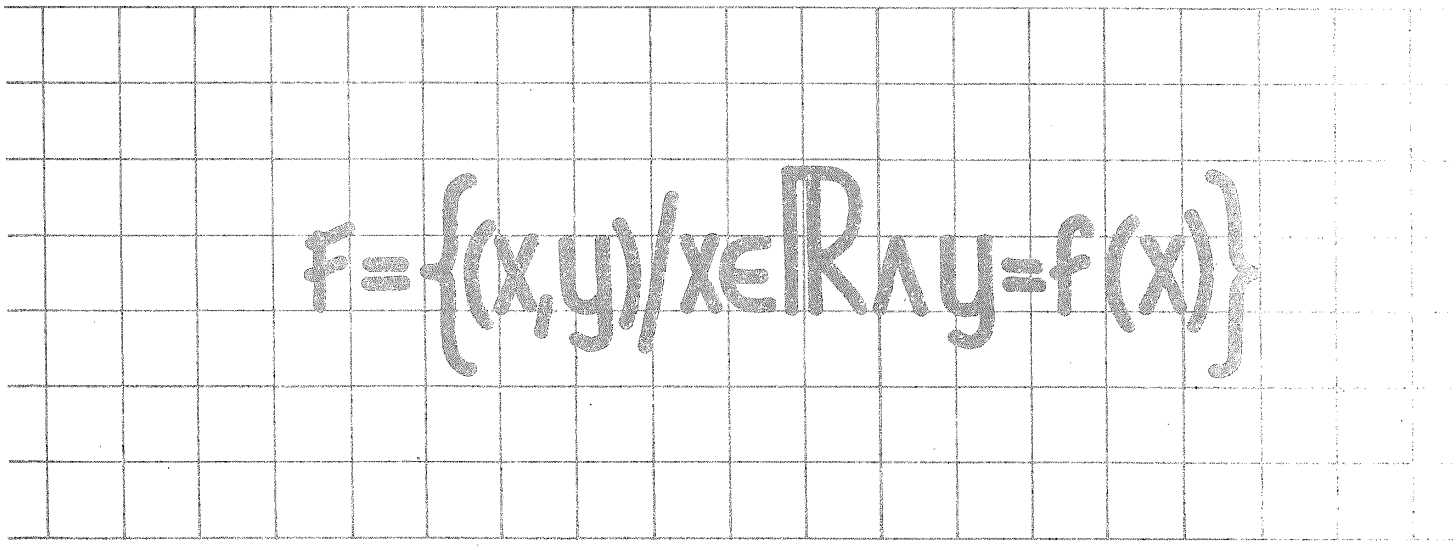
FUNCIONES EXPONENCIALES

Obras que integran el bloque 2 *(Álgebra. Modelos)*

1. La ecuación como modelo matemático
2. Ecuaciones de primer grado
3. Sistemas de ecuaciones de primer grado
4. Desigualdades de primer grado
5. Ecuaciones de segundo grado
6. Desigualdades de segundo grado
7. La relación como modelo matemático
8. Funciones
9. ***Funciones exponenciales***
10. Funciones logarítmicas
11. Ecuaciones, desigualdades y sistemas, Soluciones gráficas
12. Resolución de problemas

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 2

Àlgebra. Modelos

Módulo 9

FUNCIONES EXPONENCIALES

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
FUNCIONES EXPONENCIALES
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1985
ISBN 968-24-1523-3

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

9.1 La función exponencial como modelo matemático 9

9.2 Leyes de los exponentes (repaso) 19

9.3 Análisis de funciones exponenciales 48

9.4 Funciones inversas 66

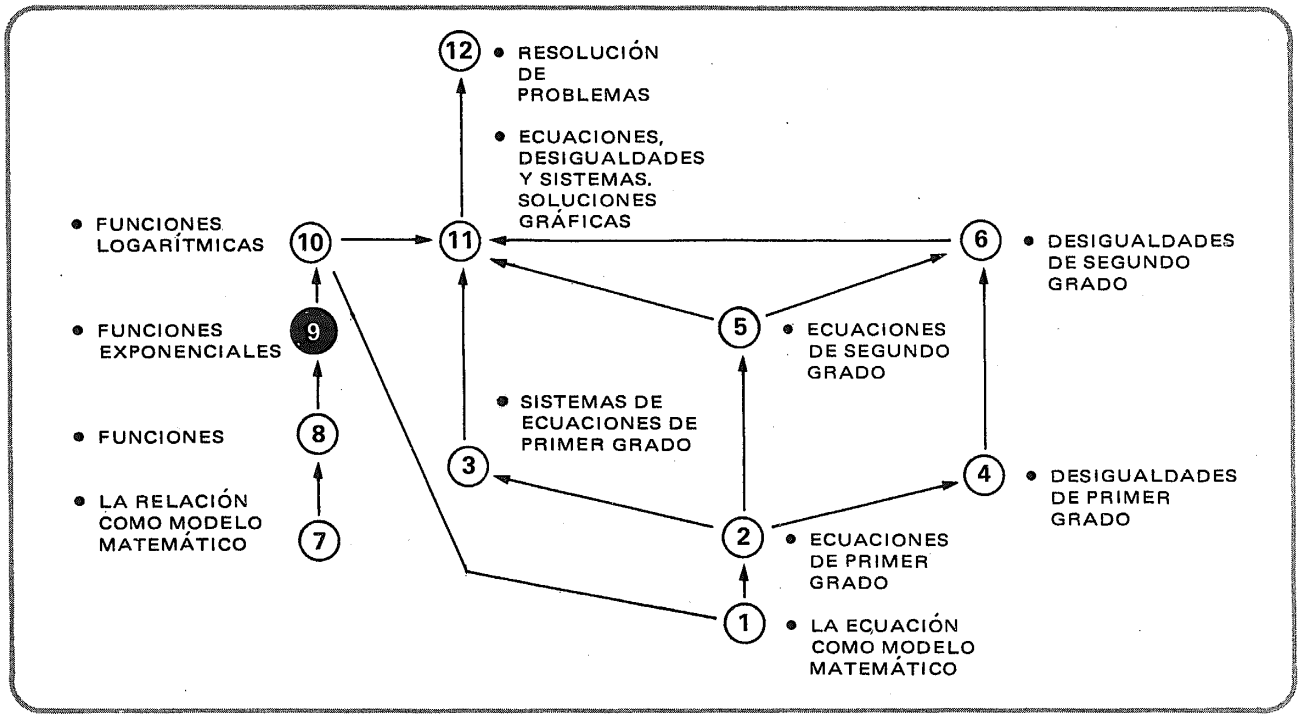
OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 2. Álgebra. Modelos

Objetivos: establecer, resolver y aplicar a situaciones reales las siguientes clases de modelos matemáticos:

– ecuaciones y desigualdades (lineales o cuadráticas)
– sistemas de ecuaciones o desigualdades
– relaciones y funciones

Esquema estructural del bloque 2



Módulo 9. Funciones exponenciales

Objetivos: interpretar una función exponencial como el modelo matemático de una situación real, representarla simbólica y gráficamente, y señalar sus elementos

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Concepto de relación	2	7
• Función (concepto, elementos, representación gráfica y clasificación)	2	8
• Resolución de ecuaciones de primer grado	2	2

9.1

La función exponencial como modelo matemático

1

Necesitamos encontrar la solución del siguiente problema financiero.

Una institución de ahorro
paga 4% de interés compuesto
capitalizable **anualmente.**

Si se depositan **25,000 pesos,**
¿qué cantidad se obtiene
al cabo de **1, 2, 3, 4, 5, . . . 10 años**?
¿Y en cuánto tiempo se **duplicará** el capital
invertido?

2

Entonces,
intentemos
establecer un

modelo matemático

de la situación.

3

Llamemos:

M_n al **monto** en pesos (capital + intereses)
al cabo de **n** años
C al **capital** invertido, en pesos
t a la **tasa** de interés, expresada como fracción decimal
I al **interés** al cabo de **n** años, en pesos

4

M = monto
C = capital
t = tasa
I = interés

Al cabo del primer año (n = 1)
el interés será:

$I_1 =$ ____

Ct

5

Al cabo del primer año (n = 1)
el monto será:

$M_1 =$ _____

$M_1 = C + Ct$

6

$M_1 = C + Ct$

Expresión equivalente con el segundo miembro factorizado:

$M_1 = C(1 + t)$

7

Al cabo del segundo año ($n = 2$) el interés calculado sobre el monto M_1 será:

$I_2 =$ [ ]

$I_2 = M_1 \cdot t$

o bien:

$I_2 = C(1 + t)t$

8

Y el monto M_2 al cabo de este segundo año será:

$M_2 =$ [ ]

$M_2 = M_1 + C(1 + t)t$

o

$M_2 = C(1 + t) + C(1 + t)t$

9

$M_2 = C(1 + t) + C(1 + t)t$

Expresión equivalente
con
el segundo miembro factorizado:

$M_2 = C(1 + t)(1 + t)$

o

$M_2 = C(1 + t)^2$

10

Organicemos en una tabla
los resultados obtenidos.

11

Llenar los casilleros que se indiquen

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	$C(1 + t)^2$
3			
4			
5			
•			
•			
•			
▽			
n			

Respuesta
en el
cuadro siguiente

12

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	C(1 + t)²
3	C(1 + t)²t		
4			
5			
•			
•			
•			
▽			
n			

Respuesta
en el
cuadro siguiente

13

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	C(1 + t)²
3	C(1 + t)²t	C(1 + t)² + C(1 + t)²t	
4			
5			
•			
•			
•			
▽			
n			

Respuesta
en el
cuadro siguiente

14

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	C(1 + t)²
3	C(1 + t)²t	C(1 + t)² + C(1 + t)²t	C(1 + t)³
4			
5			
•			
•			
•			
▽			
n			

Respuesta
en el
cuadro siguiente

15

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	$C(1+t)^2$
3	$C(1+t)^2t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2t$	$C(1+t)^3$
4			$C(1+t)^4$
5		→	
•			
•			
•			
▽			
n			

Respuesta en el cuadro siguiente

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	$C(1+t)^2$
3	$C(1+t)^2t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2t$	$C(1+t)^3$
4			$C(1+t)^4$
5			$C(1+t)^5$
•			
•			
•			
▽			
n			

16

Atención.

Al cabo del año ↓	Interés !	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	C + Ct	C(1 + t)
2	C(1 + t)t	C(1 + t) + C(1 + t)t	$C(1+t)^2$
3	$C(1+t)^2t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2t$	$C(1+t)^3$
4			$C(1+t)^4$
5			$C(1+t)^5$
•			
•			
•			
▽			
n		→	

Respuesta en el cuadro siguiente

Al cabo del año ↓	Interés I	Monto (capital + interés) M	
1	Ct	$C + Ct$	$C(1+t)$
2	$C(1+t)t$	$C(1+t) + C(1+t)t$	$C(1+t)^2$
3	$C(1+t)^2t$	$C(1+t)^2 + C(1+t)^2t$	$C(1+t)^3$
4			$C(1+t)^4$
5			$C(1+t)^5$
•			
•			
•			
▽			
n			$C(1+t)^n$

17

Hemos obtenido la expresión

$$M_n = C(1 + t)^n$$

de la cual podemos derivar
esta otra

$$R = \frac{M_n}{C} = (1 + t)^n$$

que nos da la relación entre
el monto al cabo de **n** años
y el capital inicialmente invertido.

18

$$M_n = C(1 + t)^n$$

$$R = (1 + t)^n$$

Para nuestro caso:

$C = 25\,000$
$t = 0.04$

Por lo tanto:

$M_n =$ [ ]

$R =$ [ ]

$25\,000 \times 1.04^n$

1.04^n

19

La expresión

$$M_n = 25\,000 \times 1.04^n$$

nos permite calcular
el monto al cabo de cualquier
número de años.

Por ejemplo,
al cabo del quinto año,
el monto será:

$M_5 =$ ____

- $M_5 \doteq 25\,000 \times 1.217$
  $\doteq 30\,416.32$

Recordemos que:

$(1.04)^5 = 1.04 \times 1.04 \times 1.04 \times 1.04 \times 1.04$

20

$$M_n = 25\,000 \times 1.04^n$$

Al cabo del décimo año,
el monto será:

$M_{10} =$ ____

$M_{10} \doteq 25\,000 \times 1.48$
$\doteq 37\,006.11$

21

$$R = 1.04^n$$

Al cabo de 15 años,
la relación entre el monto
y el capital invertido
será:

$R_{15} =$ ____

$R_{15} = 1.04^{15} \doteq 1.80$

22

Dejaremos pendiente
la respuesta a la pregunta:

¿En cuánto tiempo se

duplicará

el capital invertido?

hasta
una etapa posterior
en que hayamos realizado el estudio
de las

ecuaciones exponenciales.

23

Por el momento,
nos interesan especialmente
las expresiones como ésta:

$$R = 1.04^n$$

que podemos representar
en forma general, así:

$$y = a^x$$

y que llamaremos:

expresiones exponenciales

24

Si

$$y = f(x)$$

adopta la forma

$$\mathbf{y = a^x}$$

la expresión

$$\mathbf{F = \{ (x, y)/x \in R \wedge y = f(x) \}}$$

con las restricciones que luego estableceremos

representará una función que llamaremos:

función exponencial

2.9.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.9.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

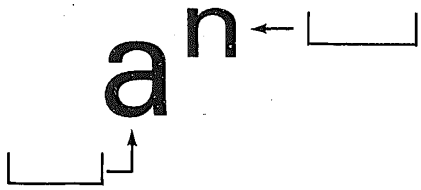
- *interpretar* una función exponencial, como modelo matemático de una situación real.

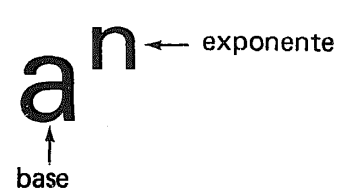
9.2

Leyes de los exponentes
(repaso)

25

Recordemos los nombres que hemos dado
a los elementos de una expresión como ésta





26

Tomemos nota
de la diferencia
entre estas
dos expresiones:

$$x^2$$

$$2^x$$

27

En una expresión como ésta

$$\{(x,y)/x \in D \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x^2}\}$$

los elementos del dominio
son sustitutos para la **base** x.

28

En la expresión

$$\{(x,y)/x \in D \wedge \mathbf{y} = \mathbf{2^x}\}$$

los elementos del dominio
son sustitutos para el **exponente** x.

29

Recordemos
algunas

propiedades

de los

exponentes.

30

$a^2 = a \cdot a$

$a^3 =$ ____

$a^4 =$ ____

$a^5 =$ ____

$a \cdot a \cdot a$

$a \cdot a \cdot a \cdot a$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

31

En general:

si

$n \in \mathbb{Z}^+$

y

$a \in \mathbb{R}$

$a^n =$ ____

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$

32

Ejemplos:

$2^3 =$ ____ $=$ ____

$1^4 =$ ____ $=$ ____

$0^2 =$ ____ $=$ ____

$(-1)^3 =$ ____ $=$ ____

$(-2)^3 =$ ____ $=$ ____

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$0 \cdot 0 = 0$

$(-1)(-1)(-1) = -1$

$(-2)(-2)(-2) = -8$

33

$1.64^2 = \square = \square$

$0.35^3 = \square = \square$

$0.01^4 = \square = \square$

$1.64 \times 1.64 = 2.6896$

$0.35 \times 0.35 \times 0.35 = 0.042875$

$0.01 \times 0.01 \times 0.01 \times 0.01 = 0.00000001$

34

Atención.

(para todo)

$\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

$0^n = \square$

0

35

Atención.

$\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

$1^n = \square$

1

36

Atención.

$\forall\ n/n\in\mathbb{Z}^+ \wedge n$ es par

$(-1)^n = \square$

1

37

Atención.

$\forall\ n/n\in\mathbb{Z}^+ \wedge n$ es impar

$(-1)^n = \square$

-1

38

Mucha atención.

$\forall\ n,m\in\mathbb{Z}^+$
y $a\in\mathbb{R}$

Si

$a^m = a^n$

podemos afirmar que:

$m = n$

Sí/No

No
(véanse cuadros siguientes)

39

Veamos algunos ejemplos:

$3^2 = 3^{\square}$

2

40

$(-5)^3 = (-5)^{\square}$

3

41

Pero:

$1^2 = 1^{\square}$

cualquier número entero positivo puesto que:

$1^2 = 1^1 = 1^3 = 1^4 = \ldots$

42

¿Para qué otros sustitutos para a **no** se verifica esta regla?

Si $a^m = a^n$
entonces $m = n$
} $n,m \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}$

$a =$ [ ]

$a =$ [ ]

- 0
- −1

puesto que:

$0^1 = 0^2 = 0^3 = 0^4 = \ldots$
$(-1)^1 = (-1)^3 = (-1)^5 = \ldots$
$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \ldots$

43

La regla enunciada debe quedar expresada así:

$\forall\, n,m \in \mathbb{Z}^+$
$\wedge \quad \forall\, a \in \mathbb{R} - \underbrace{\{-1,0,1\}}_{\text{restricción}}$

$a^m = a^n$
$\Updownarrow$ si y sólo si
$m = n$

44

Ahora bien:

$a^2 \cdot a^3 =$ [ ] $\cdot$ [ ]

$=$ [ ]

$=$ [ ]

$(a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

a^5

45

$a^4 \cdot a^2 =$ ⌊_____⌋ ⌊___⌋

$=$ ⌊_____⌋

$=$ ⌊___⌋

$(a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a)$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

a^6

46

En general:

$a^n \cdot a^m =$ ⌊____⌋

a^{n+m}

47

$(ab)^2 =$ ⌊____⌋

$=$ ⌊____⌋

$=$ ⌊____⌋

$ab \cdot ab$

$aa \cdot bb$

a^2b^2

48

En general:

$(ab)^n = \square$

$a^n b^n$

49

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \square$

$= \square$

$= \square$

$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$

$\frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b}$

$\frac{a^3}{b^3}$

50

En general:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\square}{\square}$

$\frac{a^n}{b^n}$

51

$(a^3)^2 = \square$

$= \square$

$= \square$

$a^3 \cdot a^3$

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

a^6

52

$(a^m)^n = \square$

a^{mn}

53

$\frac{a^5}{a^3} = \frac{\square}{\square}$

$= \square$

$= \square$

$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a}$

$a \cdot a$

a^2

54

$$\frac{a^m}{a^n} = \square$$

para $m > n$

a^{m-n}

55

Cuando $m = n$:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = \square$$

a^0

56

Por otro lado:

$$\square = \frac{a^m}{a^m} = a^0$$

1

57

Tenemos que aceptar que

$$a^0 = 1$$

En esta forma, comenzamos a ampliar el conjunto de los números aceptados como exponentes.

58

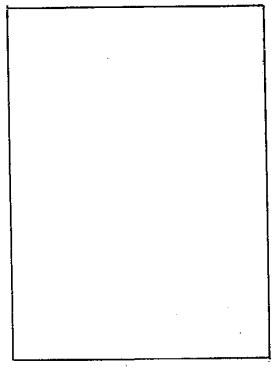
Investiguemos si existe alguna

restricción

en el

dominio de a,

para $a^0 = 1$.



Para
$a = 0$
la expresión
$a^0 = \frac{a^m}{a^m}$
se convierte en
$a^0 = \frac{0}{0}$
expresión
no definida.

59

Entonces:

$$a^0 = 1$$

$\forall\ a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

60

Investiguemos ahora lo que pasa cuando $m < n$.

en la expresión

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Por ejemplo:

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

$$\frac{1}{a \cdot a \cdot a}$$

$$\frac{1}{a^3}$$

61

Por otra parte, haciendo extensiva la regla

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

para $m < n$:

$$\frac{1}{a^3} = \frac{a^2}{a^5} = a^{\square} = a^{\square}$$

$$a^{2-5} = a^{-3}$$

62

Debemos aceptar también que

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

y en general:

$$a^{-n} = \square$$

$$\frac{1}{a^n}$$

para $a \neq 0$

63

En esta forma,
el conjunto de los números
que aceptamos como

exponentes

ha sido ampliado

de $\mathbb{Z}^+$ a $\rightarrow \mathbb{Z}$

64

Para el manejo de
expresiones con

exponentes enteros no positivos,

las

reglas

establecidas para los

enteros positivos

deberán seguir siendo

válidas.

65

Por ejemplo:

1. $x^0 \cdot x^4 =$ [ ] $=$ [ ]
2. $x^{-3} \cdot x^5 =$ [ ] $=$ [ ]
3. $x^{-4}/x^{-1} =$ [ ] $=$ [ ]
4. $(x^{-6})^{-3} =$ [ ] $=$ [ ]
5. $(x^{-2})^0 =$ [ ] $=$ [ ]

1. $x^{0+4} = x^4$
2. $x^{-3+5} = x^2$
3. $x^{-4-(-1)}$
   x^{-4+1}
   x^{-3}
4. $x^{(-6)(-3)}$
   x^{18}
5. $x^0 = 1$

2.9.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

66

Nos preguntamos si
es posible

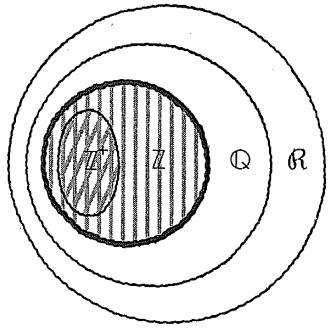
seguir ampliando

el

conjunto

de los números
que pueden
funcionar como

exponentes.



67

Recordemos que,
por ejemplo:

$$a^{\frac{1}{2}} = \square$$

en forma de radical.

$\sqrt{a}$

68

Si elevamos al cuadrado el primer miembro de la expresión

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

obtenemos por la regla:

$$(a^m)^n = a^{m\ n}$$

$$\square$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$a^{\frac{1}{2}\cdot 2}$$

$$\downarrow$$

$$a^{\frac{2}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$a^1$$

$$\downarrow$$

$$a$$

69

Si elevamos al cuadrado el segundo miembro de

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

obtenemos:

$$\square$$

$$(\sqrt{a})^2$$

$$\downarrow$$

$$a$$

70

En general:

$$a^{\frac{1}{n}} = \square$$

$$\sqrt[n]{a}$$

71

Investiguemos las

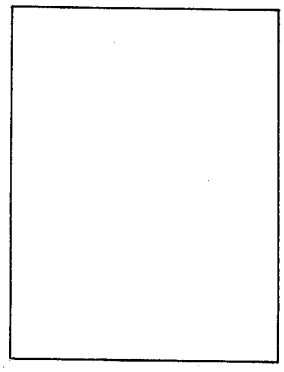
restricciones

en el dominio de

a

para la expresión

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$



La expresión

$\sqrt[n]{a}$

no se define en $\mathbb{R}$ para

$a < 0$

si
n es par.

72

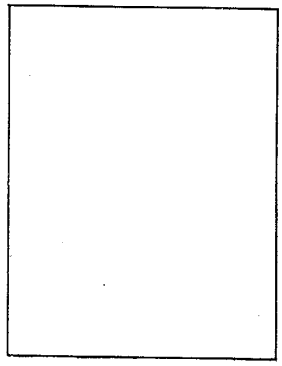
Investiguemos ahora las

restricciones

en el dominio de n para la

expresión

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$



Hemos definido la expresión

$\sqrt[n]{a}$

únicamente para

$n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \neq 1$.

73

También hemos visto que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Pero,
si no se tienen en cuenta las

restricciones

en los dominios de las variables involucradas, podemos cometer errores en la aplicación de esta regla.

74

Veamos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si, por ejemplo:

$a = -8$
$m = 2$
$n = 6$

obtenemos tres resultados diferentes para $(-8)^{\frac{2}{6}}$:

1. Por un lado:

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

2. Por otra parte:

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = (\sqrt[6]{-8})^2 = \text{número no definido}$$

3. Puesto que $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$:

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

75

Atención.

Por lo tanto, diremos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

si $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$
$m \in \mathbb{Z}$
y $n \in \mathbb{Z} \wedge n > 0$

76

Entonces, para $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $m, n \in \mathbb{Q}$:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^m/a^n = a^{m-n}$
5. $(a/b)^n = a^n/b^n$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = 1/a^n$

2.9.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario,
de transformación
de expresiones con
exponentes racionales.

77

Podemos ahora calcular
el valor numérico
de una expresión como

$$2^n$$

en que

n es un número racional.

78

Por ejemplo:

Si $n = 1$ $\quad 2^n = 2^1 = 2$

Si $n = 2$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{}$

Si $n = 3$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{}$

Si $n = 0$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{}$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^0 = 1$

79

Si $n = -1$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

Si $n = -2$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

Si $n = -3$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{} = \boxed{}$

$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

80

Si $n = \frac{1}{2}$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{}$

Como expresión decimal → $\boxed{}$

Si $n = \frac{1}{3}$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{}$

Como expresión decimal → $\boxed{}$

Si $n = \frac{1}{4}$ $\quad 2^n = \boxed{} = \boxed{}$

Como expresión decimal → $\boxed{}$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\doteq 1.4142$

$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

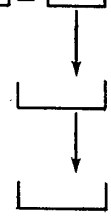
$\doteq 1.2599$

$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

$\doteq 1.1892$

81

Si $n = -\frac{1}{2}$ $\quad 2^n = \square = \square$



$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\doteq \frac{1}{1.4142}$$

$$\doteq 0.7071$$

82

Si $n = \frac{3}{2}$ $\quad 2^n = \square = \square = \square$

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

$$\doteq 2.8284$$

83

Si $n = -\frac{3}{4}$ $\quad 2^n = \square = \square = \square$

$= \square = \square$

$= \square$

$$2^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \doteq \frac{1}{1.6818}$$

$$\doteq 0.5946$$

84

Ahora bien:

$(-2)^{\frac{3}{2}} =$ ⌊_____⌋

Hemos convenido que en la expresión a^n

a debe ser positivo

85

$2^{\frac{-3}{4}} =$ ⌊_____⌋

$2^{\frac{-3}{4}}$

$\sqrt[4]{(2)^{-3}}$ → $\sqrt[4]{1/2^3}$ → $\sqrt[4]{1/8}$ → $\sqrt[4]{0.125}$ → 0.5946

$(\sqrt[4]{2})^{-3}$ → $(1.1892)^{-3}$ → $\frac{1}{(1.1892)^3}$ → $\frac{1}{1.6818}$ → 0.5946

86

$2^{\frac{5}{-2}} =$ ⌊_____⌋

$2^{\frac{5}{-2}}$

$\sqrt[-2]{2^5}$ → expresiones no definidas

$(\sqrt[-2]{2})^5$

Hemos establecido que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

no se cumple
para

$$n \leqslant 0$$

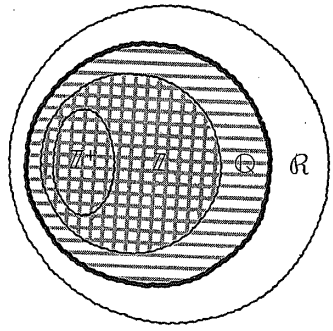
88

¿Es posible seguir

ampliando

aún más el
conjunto de los números
que pueden desempeñar
el papel de

exponentes?



89

¿Podemos asignar
un significado a
una expresión
como ésta?

$$2^{\sqrt{2}}$$

90

Recordemos que:

$\sqrt{2}$

es un número

irracional,

que no puede ser expresado
en la forma:

a/b con $a,b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$.

91

Pero,
podemos
aproximarnos tanto como
queramos a

$\sqrt{2}$

por medio de
números

racionales

de la forma:

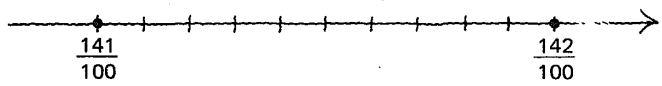
$\frac{a}{b}$

92

Veamos:

$\frac{141}{100}$	$\frac{142}{100}$
Es un número (racional) un poco	Es un número (racional) un poco
menor	**mayor**
que $\sqrt{2}$	que $\sqrt{2}$

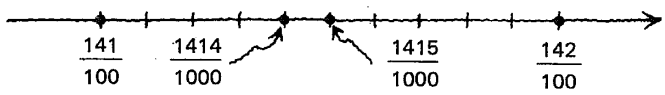
Expresados gráficamente:



93

$\frac{1414}{1000}$ Es un número racional un poco **menor** que $\sqrt{2}$

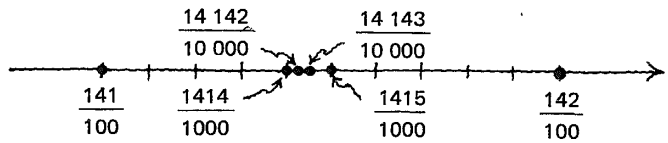
$\frac{1415}{1000}$ Es un número racional un poco **mayor** que $\sqrt{2}$



94

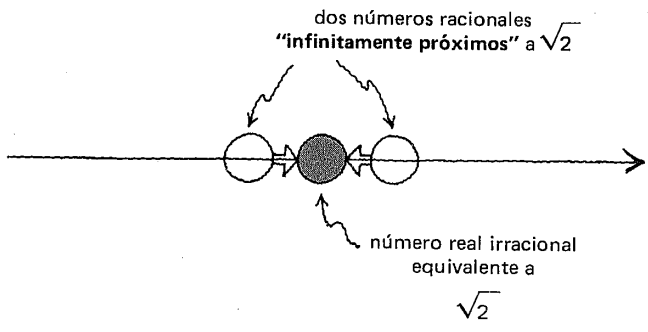
$\frac{14\,142}{10\,000}$ Es un número racional un poco **menor** que $\sqrt{2}$.

$\frac{14\,143}{10\,000}$ Es un número racional un poco **mayor** que $\sqrt{2}$.



95

Este proceso puede continuarse **indefinidamente:**



96

De manera similar
podemos
"visualizar"
la existencia de
un número tal como:

$$2^{\sqrt{2}}$$

97

$2^{\frac{141}{100}}$

es un número
un poco

menor

que $2^{\sqrt{2}}$

Expresado
aproximadamente
en forma decimal:

↓

2.65737163

$2^{\frac{142}{100}}$

es un número
un poco

mayor

que $2^{\sqrt{2}}$

Expresado
aproximadamente
en forma decimal:

↓

2.67585511

98

$2^{\frac{1414}{1000}}$

es un número
un poco

menor

que $2^{\sqrt{2}}$

Expresado
aproximadamente
en forma decimal:

↓

2.66474965

$2^{\frac{1415}{1000}}$

es un número
un poco

mayor

que $2^{\sqrt{2}}$

Expresado
aproximadamente
en forma decimal:

↓

2.66659735

99

$2^{\frac{14\,142}{10\,000}}$

Es un número un poco **menor** que $2^{\sqrt{2}}$.

Expresado aproximadamente en forma decimal:

↓

2.66511909

$2^{\frac{14\,143}{10\,000}}$

Es un número un poco **mayor** que $2^{\sqrt{2}}$.

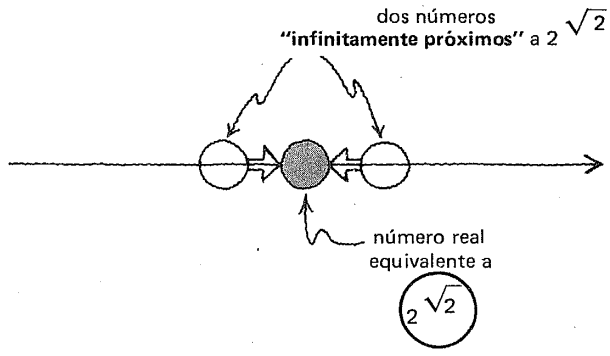
Expresado aproximadamente en forma decimal:

↓

2.66530383

100

Este proceso puede continuarse **indefinidamente:**



101

Aceptamos la existencia de

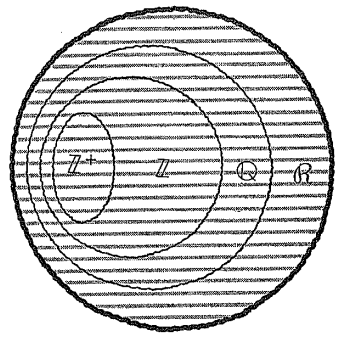
a^{n}

para

$a \in \mathbb{R}^{+}$

y

$n \in \mathbb{R}$



102

Las reglas enunciadas
en el cuadro siguiente
seguirán siendo
válidas
para

$a, b \in \mathbb{R}^+$
y
$m, n \in \mathbb{R}$

103

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^m)^n = a^{m\,n}$
4. $a^m / a^n = a^{m-n}$
5. $(a/b)^n = a^n / b^n$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{-n} = 1/a^n$

104

También debemos recordar que:

$\forall\ n,m \in \mathbb{R}$
$\wedge \forall\ a \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$

$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m$
si y sólo si

Igualdad de exponentes

$\forall\ n \in \mathbb{R} \wedge n \neq 0$
$\wedge \forall\ a,b \in \mathbb{R}^+$

$a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$
si y sólo si

Igualdad de bases

2.9.2.3

Práctica de
transformación de expresiones
con exponentes reales,
si se considera necesario.

2.9.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *recordar y aplicar* las reglas de transformación para las expresiones exponenciales.

9.3

Análisis de funciones exponenciales

105

Una expresión de la forma

$$F = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = a^x\}$$

Con las restricciones que luego estableceremos

representa una

función exponencial.

106

Además,
para que la expresión

a^x

represente un número definido en $\mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$

se requiere que

$a > 0$.

107

Intentemos trazar la

gráfica cartesiana de

$F_1 = \{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = 1^x\}$

Comencemos por seleccionar algunos elementos

$x \in \mathcal{R}$

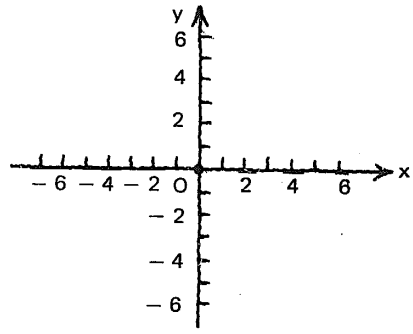
y calculemos las imágenes $y = 1^x$ correspondientes.

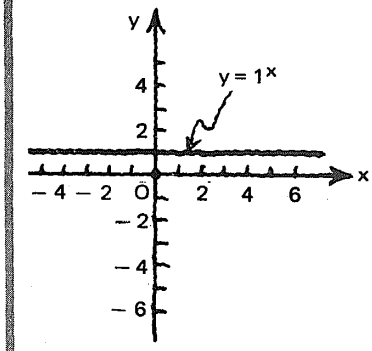
x	$y = 1^x$
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

x	$y = 1^x$
−2	1
−1	1
0	1
1	1
2	1
3	1

108

Completar la gráfica de $y = 1^x$





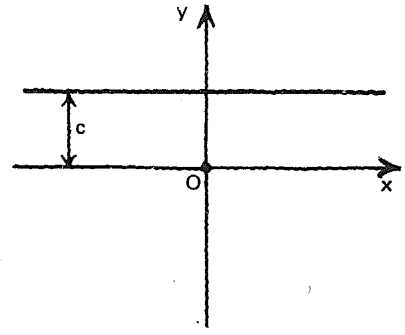
109

Una gráfica como ésta nos resulta familiar

Corresponde a una expresión de la forma:

$y = c$

A la función que representa le hemos llamado



función constante

110

1^x

Es una

constante

numéricamente igual a 1

$\forall\ x \in \mathcal{R}$

111

Entonces,
la expresión

$$F = \{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = a^x\}$$

no será aceptada como representativa
de una función exponencial

si $a = 1$

112

Atención.

La expresión

$$F = \{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = a^x \wedge a \in \mathcal{R}^+ \wedge a \neq 1\}$$

representará una

función exponencial.

113

Completar la tabla, trazar la gráfica cartesiana de:

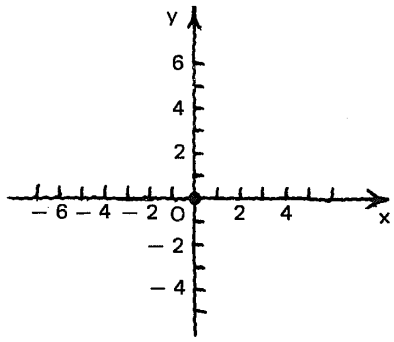
$F_2 = \{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = 2^x\}$

y describir F_2 en la forma:

$\{(x,y)/x \in D, y \in \mathcal{R} \wedge y = f(x)\}$

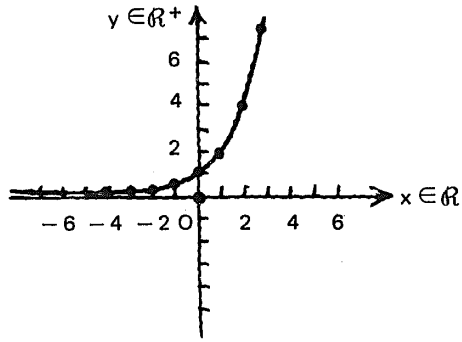
siendo D el dominio, y R el rango de la función.

x	$y = 2^x$
− 3	
− 2	
− 1	
− 0	
1	
2	
3	



Respuesta en el cuadro siguiente

x	$y = 2^x$
− 3	1/8
− 2	1/4
− 1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



$F_2 = \{(x, y)/x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}^+ \wedge y = 2^x\}$

114

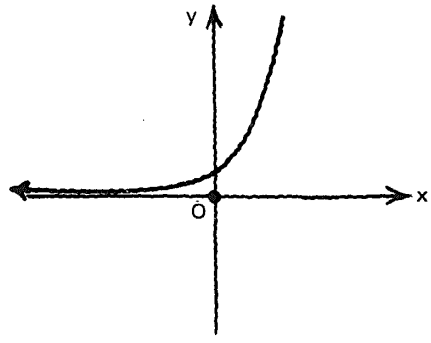
Observemos que, a medida que x disminuye, la curva

"se acerca más y más

al eje de las x, pero

sin llegar

a él".



115

Podemos usar el siguiente simbolismo.

Si

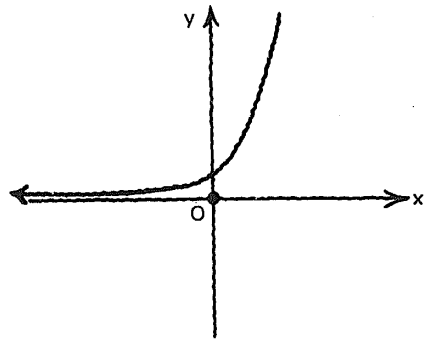
$x \to -\infty$

"x tiende a menos infinito"

entonces

$y \to 0$

"y tiende a cero"



116

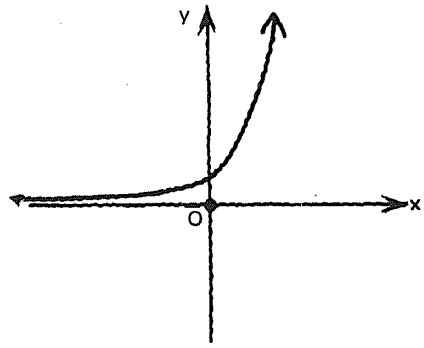
Por otra parte

si

$x \to +\infty$

entonces

$y \to$ [ ]



$+\infty$

117

Trazar la gráfica de

$\{(x,y)/x \in \mathcal{R} \wedge y = 4^x\}$

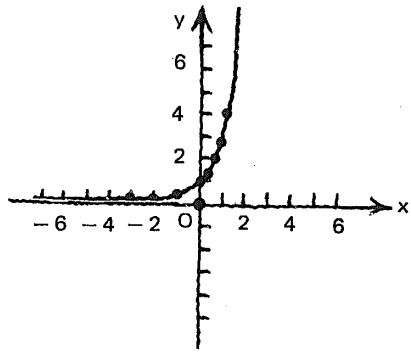
y describir la función en la forma:

$\{(x,y)/x \in D, y \in R \wedge y = f(x)\}$

Respuesta en el cuadro siguiente

Atención.

x	$y = 4^x$
− 3	1/64
− 2	1/16
− 1	1/4
0	1
1/4	$\sqrt[4]{4} \doteq 1.414$
1/2	$\sqrt{4} = 2$
3/4	$\sqrt[4]{4^3} = 2.828$
1	4



$\{(x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \wedge y = 4^x\}$

118

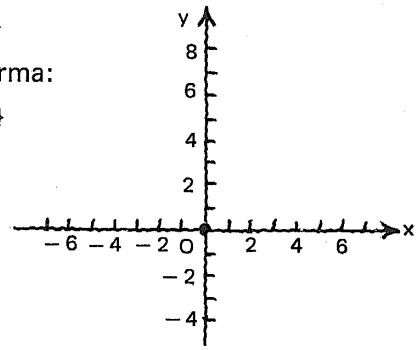
Completar la tabla, trazar la gráfica cartesiana de

$F_4 = \{(x,y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 8^x\}$

y describir la función en la forma:

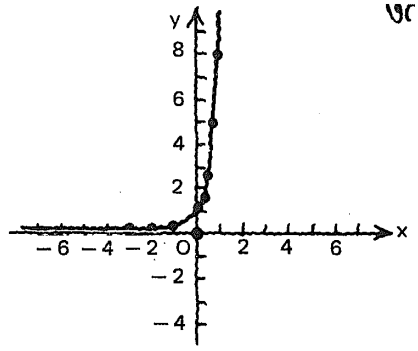
$\{(x,y)/x \in D, y \in \mathbb{R} \wedge y = f(x)\}$

x	$y = 8^x$



Respuesta en el cuadro siguiente

x	$y = 8^x$
− 3	1/512
− 2	1/64
− 1	1/8
0	1
1/4	$\sqrt[4]{8} \doteq 1.682$
1/2	$\sqrt{8} \doteq 2.828$
3/4	$\sqrt[4]{8^3} \doteq 4.757$
1	8



$F_4 = \{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \wedge y = 8^x\}$

119

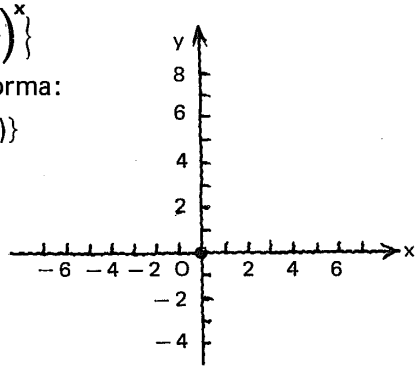
Completar la tabla, trazar la gráfica cartesiana de

$F_5 = \left\{(x,y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}$

y describir la función en la forma:

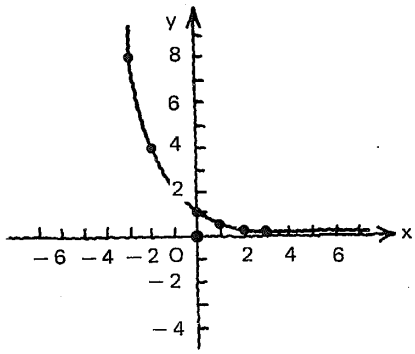
$\{(x,y)/x \in D, y \in R \wedge y = f(x)\}$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Respuesta en el cuadro siguiente

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
− 3	8
− 2	4
− 1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



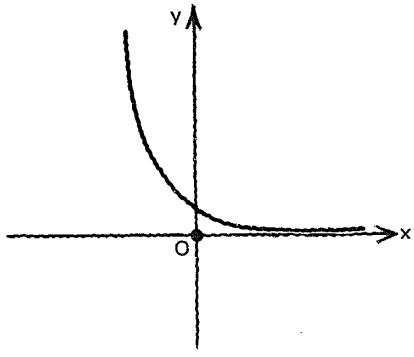
$F_5 = \left\{(x,y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+ \wedge y = \left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}$

120

Con el apoyo de la gráfica completemos el siguiente enunciado:

"Observamos que a medida que x aumenta, la curva. . .

_____"



. . . **se acerca más y más** al eje de las x, pero

sin llegar

a él.

121

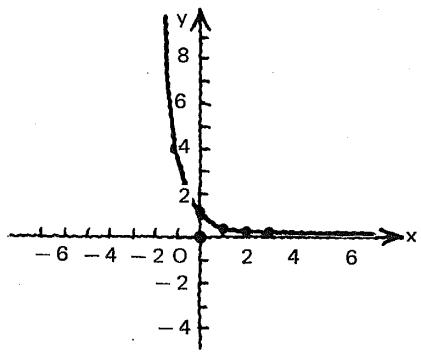
Elaborar la tabla, trazar la gráfica cartesiana de

$$\{(x,y)/x\in\mathcal{R} \wedge y \left(\frac{1}{4}\right)^x\}$$

y describir la función como lo hemos hecho hasta el momento.

Respuesta en el cuadro siguiente

x	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
− 3	64
− 2	16
− 1	4
0	1
1	1/4
2	1/16
3	1/64



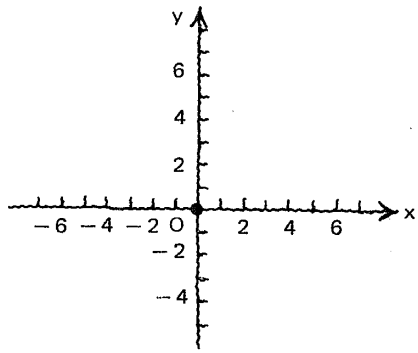
$$\{(x,y)/x\in\mathcal{R}, y\in\mathcal{R}^+ \wedge y = \left(\frac{1}{4}\right)^x\}$$

122

Elaborar la tabla, trazar la gráfica cartesiana de

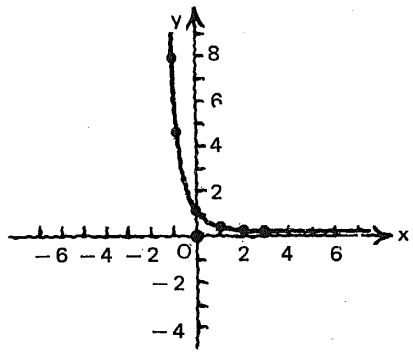
$$\{(x,y)/x\in\mathcal{R} \wedge y = \left(\frac{1}{8}\right)^x\}$$

y describir la función como lo hemos hecho hasta el momento.



Respuesta en el cuadro siguiente

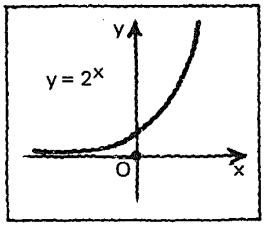
x	$y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$
-1	8
$-\frac{3}{4}$	$\sqrt[4]{8^3} \doteq 4.757$
$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{8} \doteq 2.828$
$-\frac{1}{4}$	$\sqrt[4]{8} \doteq 1.682$
0	1
1	1/8
2	1/64
3	1/512
4	1/4096

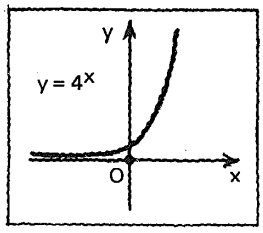


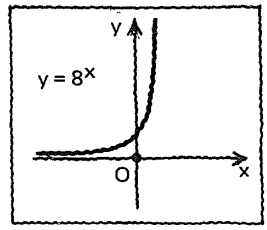
$$\left\{(x,y)/x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^+ \wedge y = \left(\frac{1}{8}\right)^x\right\}$$

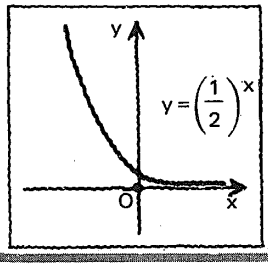
123

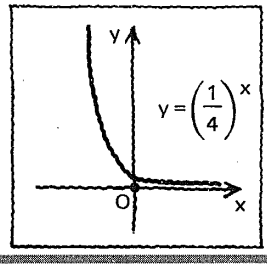
Resumen de las gráficas obtenidas:

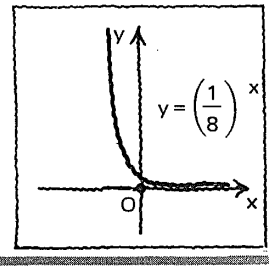












124

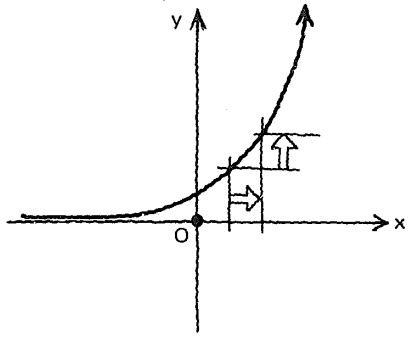
Nos hemos dado cuenta de que para

$y = a^x$

tal que

$a > 1$

si x aumenta, y aumenta.



125

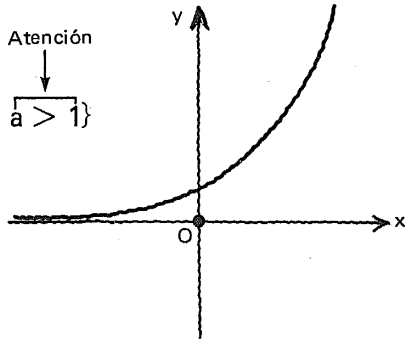
Decimos que:
la función representada por

Atención

$\{(x,y)/x\in\mathcal{R}, y\in\mathcal{R}^+, y = a^x \wedge a > 1\}$

es

creciente.



126

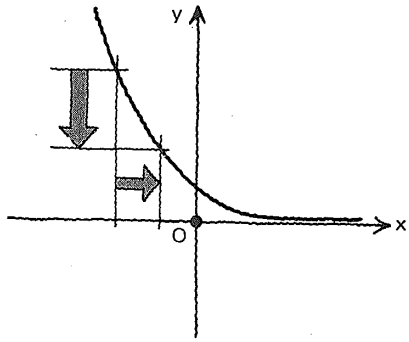
Para

$y = a^x$

tal que

$0 < a < 1$

si x aumenta,
y disminuye.



127

Decimos que:

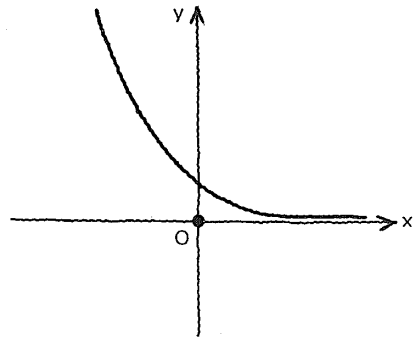
la función representada por

Atención

$\{(x,y)/x\in\mathcal{R}, y\in\mathcal{R}^+, y = a^x \wedge 0 < a < 1\}$

es

decreciente.



128

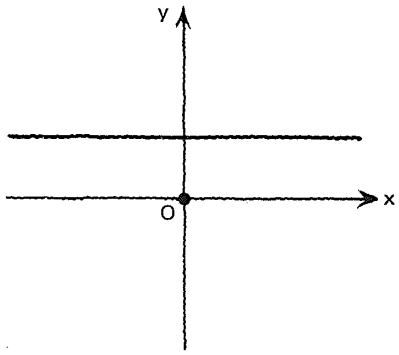
Hemos visto que

para

$y = a^x$

tal que

$a = 1$



si x aumenta,

y ____

ni aumenta ni disminuye
o bien:
permanece constante

129

Recordemos que

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 1^x\}$

representa una

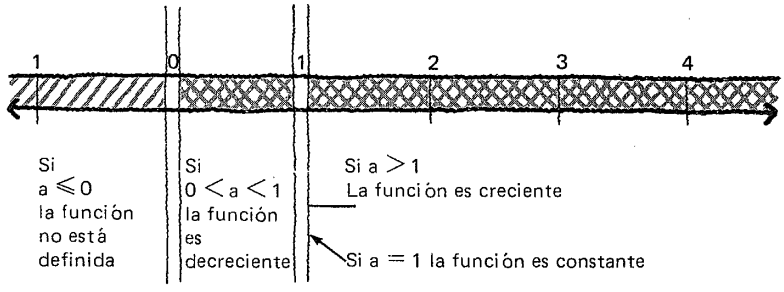
____

función constante

130

Estudiar con atención este esquema.

Función exponencial $\{(x,y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = a^x\}$



131

Señalar la opción correcta.

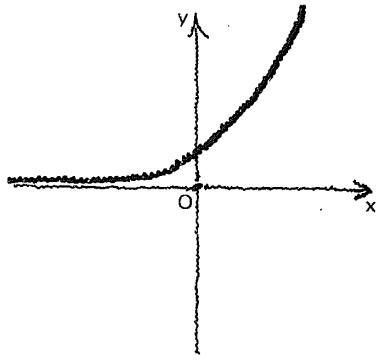
He aquí una gráfica de

$\{(x,y)/x\in\mathcal{R},\ y\in\mathcal{R}^+ \wedge y = a^x\}$

en que $a\in (1, +\infty)$.

se trata de una función

creciente/decreciente

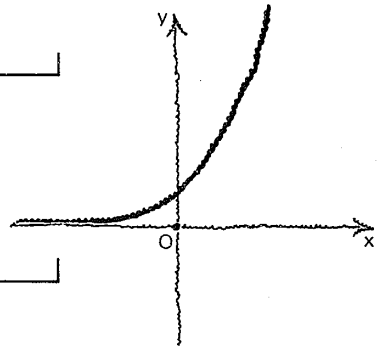


creciente

132

Si $x \to +\infty$ entonces $f(x) \to$ ____

Si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to$ ____



$+\infty$

0

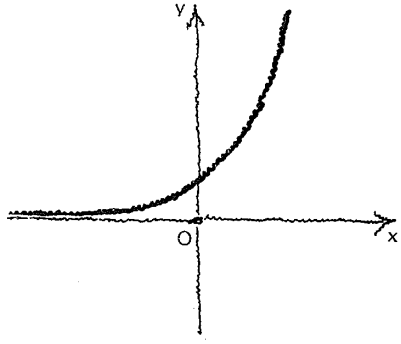
133

El

dominio

de la función así representada es

____



$\mathcal{R}$

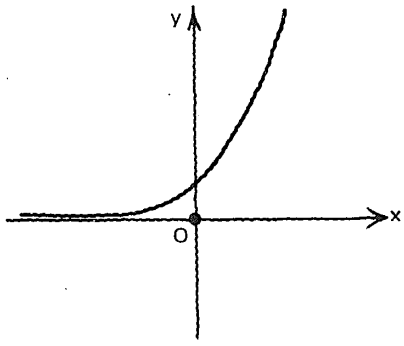
134

El

rango

de la función así representada

es



$\mathbb{R}^+$
o
$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y > 0\}$

135

Recordemos ahora la

clasificación

que hemos hecho de las

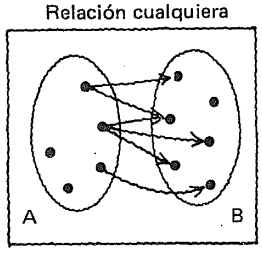
relaciones

y

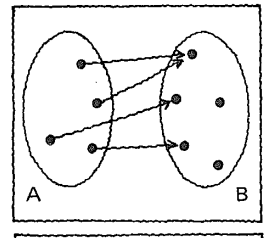
funciones.

136

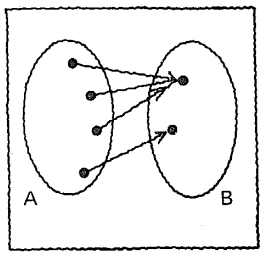
Resumen de relaciones y funciones.



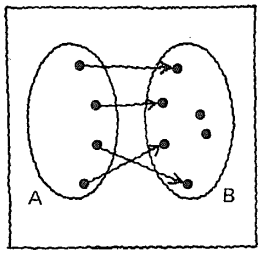
Relación cualquiera



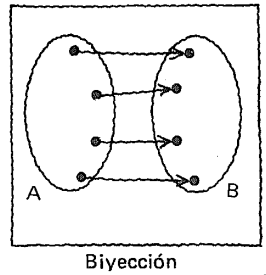
Función cualquiera



Suprayección



Inyección



Biyección

137

Resumen de relaciones y funciones.

Relación cualquiera

De cada elemento de A sale un número indiferente de flechas.	A cada elemento de B llega un número indiferente de flechas.

Función cualquiera

De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega un número indiferente de flechas.

Suprayección

De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega al menos una flecha.

Inyección

De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega una flecha como máximo.

Biyección

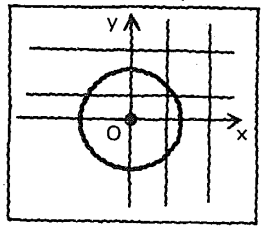
De cada elemento de A sale una flecha y sólo una.	A cada elemento de B llega una flecha y sólo una.

138

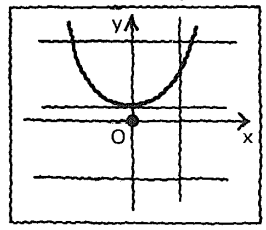
Resumen de relaciones y funciones

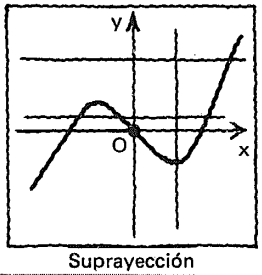
en $\mathcal{R}x\mathcal{R}$.

Relación cualquiera

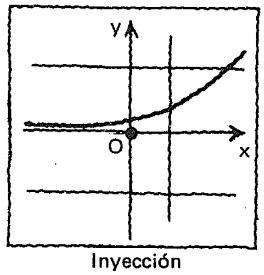


Función cualquiera

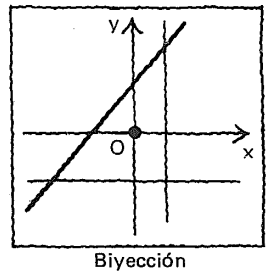




Suprayección



Inyección



Biyección

139

Si
convenimos en representar
una relación
en esta forma:

$$R = \{(x,y)/x \in D, y \in R \wedge y = f(x)\}$$

O en ésta:

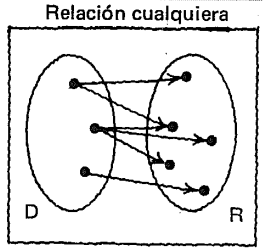
$$R : D \to R/y = f(x)$$

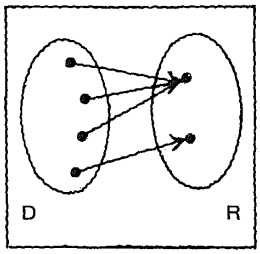
en que D es el dominio y R el rango,
obtenemos el resumen que aparece
en el cuadro siguiente .

140

Resumen de relaciones y funciones descritas en términos del dominio y del rango.

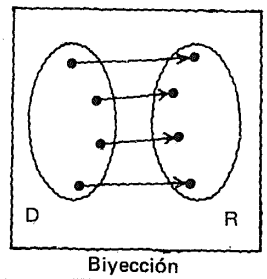
Relación cualquiera





Suprayección

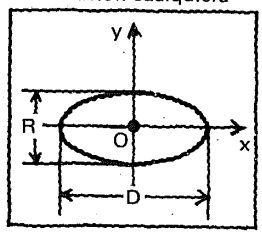
Biyección

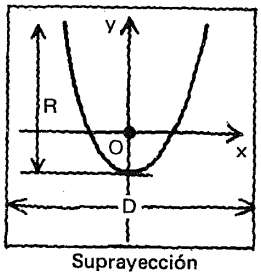


141

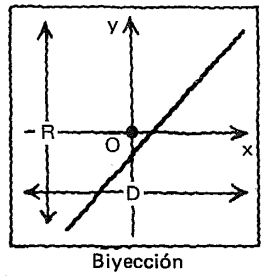
Resumen de relaciones y funciones descritas en términos del dominio y del rango.

Relación cualquiera





Suprayección



Biyección

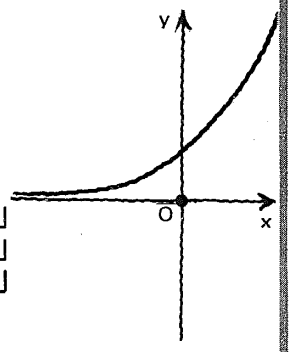
142

Esta gráfica

y la expresión

$\{(x,y)/x\in\mathcal{R}, y\in\mathcal{R}^+, y = a^x \wedge a > 1\}$

representan una { relación cualquiera ☐ / suprayección ☐ / biyección ☐



biyección

143

Analicemos,
ahora,
la función representada por

$$\{(x,y)/x\in\mathbb{R} \wedge y = a^x \wedge 0 < a < 1\}$$

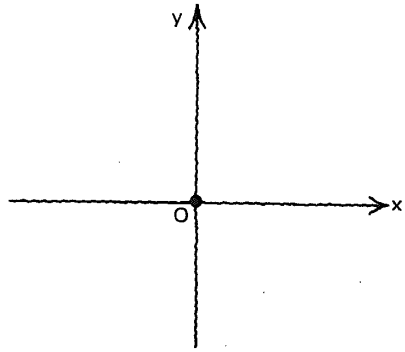
144

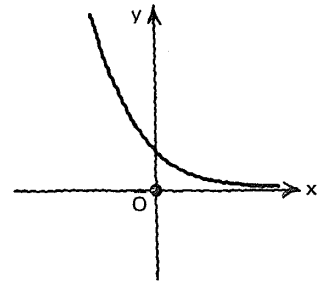
Trazar una gráfica de

$\{(x,y)/x\in\mathbb{R} \wedge y = a^x\}$

en que

$a\in(0,1)$



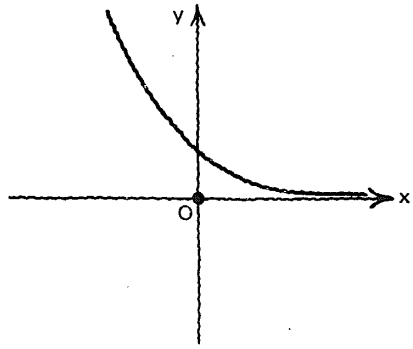


145

Señalar la opción correcta.

Esta gráfica
corresponde a
una función

creciente/decreciente

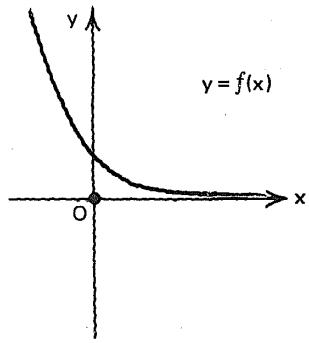


decreciente

146

Si $x \to +\infty$ entonces $f(x) \to$ ⌊___⌋

Si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to$ ⌊___⌋



0

$+\infty$

147

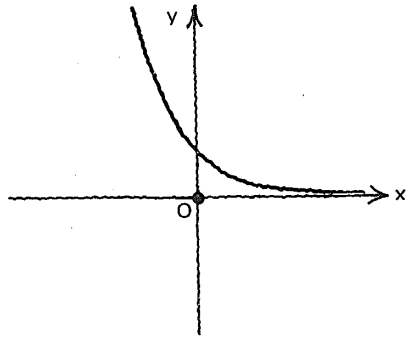
El

dominio

de la función así representada

es

⌊_____⌋.



$\mathbb{R}$

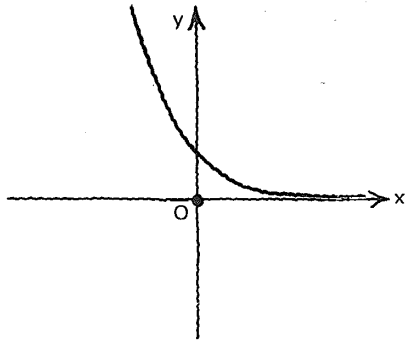
148

El

rango

es

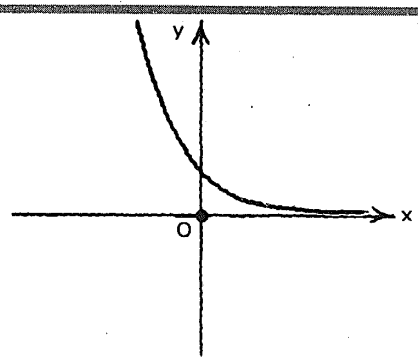
⌊_____⌋



$\mathbb{R}^+$
o bien:
$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y > 0\}$

149

Esta gráfica



y la expresión

$\{(x,y)/x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+,\ y = a^x \ \wedge\ 0 < a < 1\}$

representan una { relación cualquiera ☐ / suprayección ☐ / biyección ☐

biyección

2.9.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.9.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *decir* si una función exponencial, dada en términos del dominio y del rango, es:

  — creciente o decreciente,
  — suprayectiva o biyectiva;

- *determinar* el *dominio,* el *rango* y la *extensión* de una función exponencial dada.

9.4

Funciones inversas

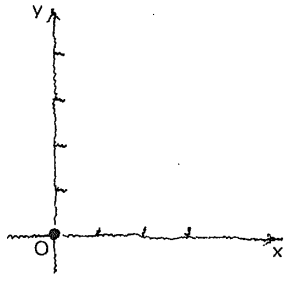
150

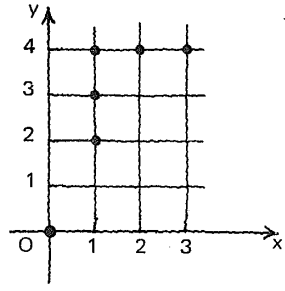
Consideremos la relación

$R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$

y tracemos su

gráfica cartesiana.





151

Ahora,
en

$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$$

intercambiemos los componentes

de cada uno de los pares ordenados:

$\{(2,1), \llcorner\!\lrcorner, \llcorner\!\lrcorner, \llcorner\!\lrcorner, \llcorner\!\lrcorner\}$

(3,1), (4,1), (4,2), (4,3)

152

Al conjunto resultante
le llamaremos

relación inversa

de la

relación R

y

lo simbolizaremos así:

$\mathbf{R^{-1}}$

153

La relación dada:

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$

Su **inversa:**

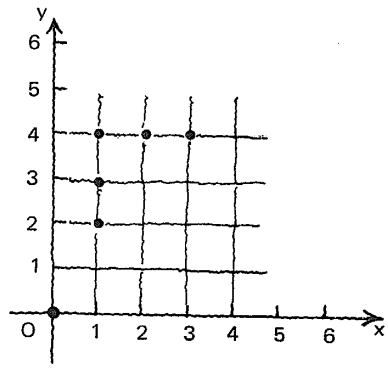
$\mathbf{R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}}$

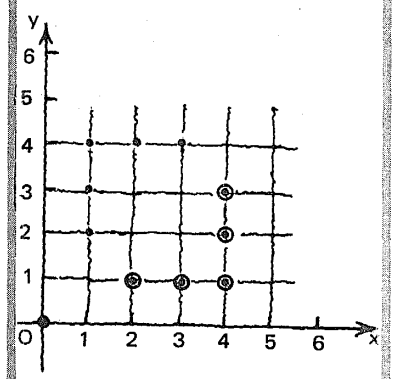
154

En la gráfica cartesiana
de la relación dada (R)
tracemos la gráfica
correspondiente a

$\mathbf{R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1),}$
$\mathbf{(4,2), (4,3)\}}$

indicando los puntos así: ◉





155

En la gráfica
del cuadro anterior
los puntos •
corresponden a
la relación dada R,
y
los puntos ◉
corresponden a
la relación inversa R^{-1}

156

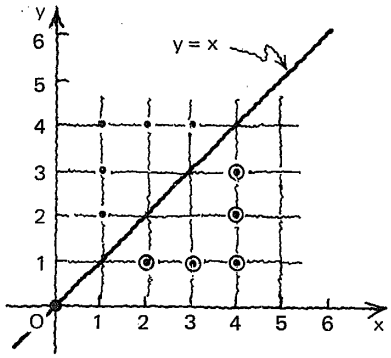
Observemos
la

simetría

de las
gráficas de

R y R^{-1}

respecto de
la recta



$\{(x,y) x \in \mathcal{R} \wedge y = x\}$

157

Ahora bien:

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$

El **dominio** de R es [ ]

El **rango** de R es [ ]

{1,2,3}

{2,3,4}

158

$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

El **dominio** de R^{-1} es [ ]

El **rango** de R^{-1} es [ ]

{2,3,4}

{1,2,3}

159

Atención.

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$ { Dominio de R: {1,2,3}; Rango de R: {2,3,4}

$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3)\}$ { Dominio de R^{-1}: {2,3,4}; Rango de R^{-1}: {1,2,3}

Observemos que

el **dominio de R^{-1}** es igual al **rango de R,**
y el **rango de R^{-1}** es igual al **dominio de R.**

160

Consideremos
ahora
la relación

$$F = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$$

a la cual
identificamos como **función,**

porque

[ ]

no hay dos pares
ordenados
que tengan
el mismo primer
componente

161

La inversa de

$$F = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$$

es

$F^{-1} =$ [_____]

$\{(4,-2), (1,-1), (0,0)\}$
$\{(1,1), (4,2)\}$

162

Señalar la opción correcta.

$F^{-1} = \{(4,-2), (1,-1), (0,0), (1,1), (4,2)\}$

F^{-1} es/no es una función,

porque

[_____]

- **no es**
- **sí** hay dos pares ordenados que tienen el mismo primer componente:

$(4, -2)$ y $(4,2)$

163

Para algunas funciones como

$$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

su inversa no es una función.

164

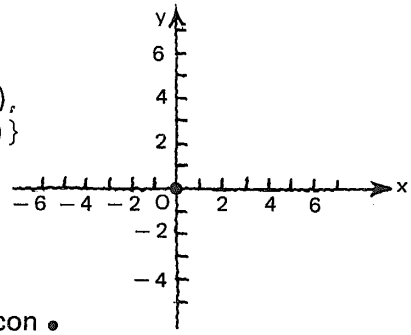
Completar las gráficas cartesianas de

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

y

$F^{-1} = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$

indicando los elementos de F con • y los de F^{-1} con ◉.



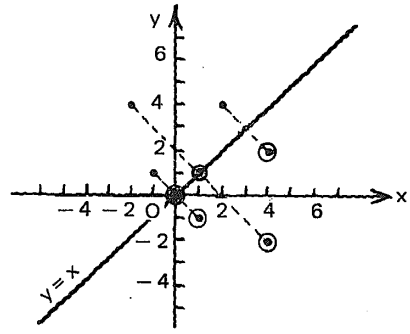
Respuesta en el cuadro siguiente

Observemos la

simetría

que hay entre la gráfica de la función F y la gráfica de la relación inversa F^{-1} respecto de la recta

$\{x, y / x \in \mathbb{R} \wedge y = x\}$



165

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

$F^{-1} = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$

Dominio de F → ____ Dominio de F^{-1} → ____

Rango de F → ____ Rango de F^{-1} → ____

Respuesta en el cuadro siguiente

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

$F^{-1} = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$

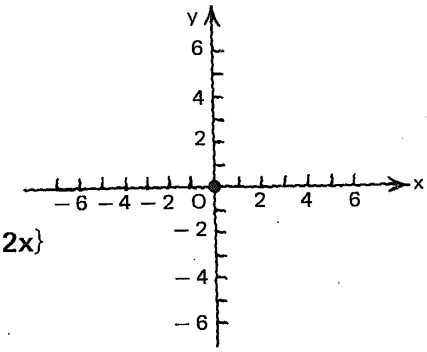
Dominio de F → $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ → Dominio de F^{-1} → $\{0, 1, 4\}$

Rango de F → $\{0, 1, 4\}$ → Rango de F^{-1} → $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

166

Completar la gráfica cartesiana de la función

$G = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = 2x\}$

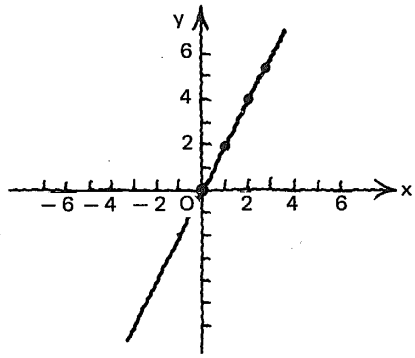


Respuesta en el cuadro siguiente

Podemos decir que esta gráfica corresponde a una

función,

porque



toda vertical trazada dentro del dominio (en este caso: $\mathbb{R}$) interseca a la gráfica en un punto y sólo uno

167

$G = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{y = 2x}\}$

Para determinar la
regla de correspondencia
de G^{-1}
intercambiamos las literales **x** y **y**
y despejamos **y.**

Regla de correspondencia de G^{-1} :

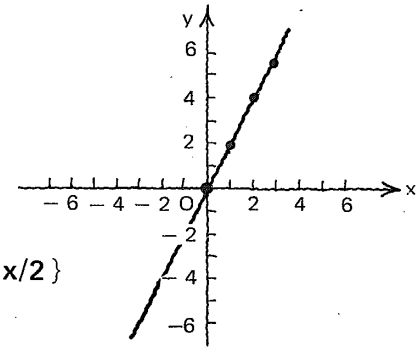
$x = 2y$

$y = x/2$

168

Trazar con
línea punteada
la gráfica
correspondiente a

$G^{-1} = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{y = x/2}\}$



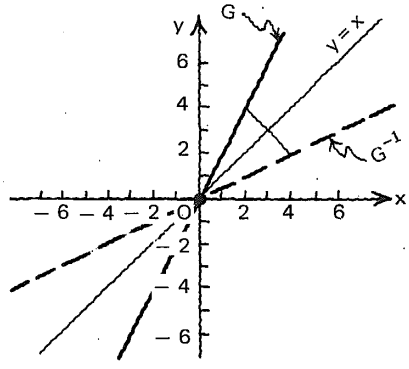
Respuesta
en el
cuadro siguiente

Persiste la

simetría

entre las gráficas
de dos relaciones inversas
respecto de la recta

$\{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge y = x\}$

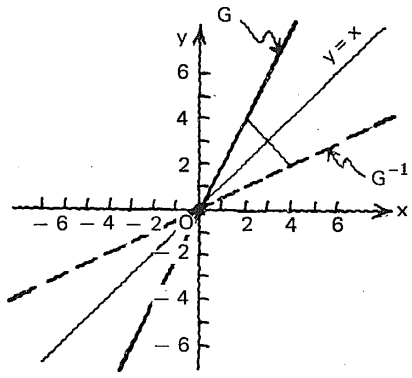


169

Señalar la opción correcta.

G^{-1}

es/no es una función.
porque



es
toda vertical trazada
dentro del dominio
(en este caso: $\mathbb{R}$)
interseca a la gráfica
en un punto y sólo uno

170

Hay funciones,
tales como

$$G = \{(x, y)/x \in \mathbb{R} \wedge \mathbf{y = 2x}\}$$

cuya

inversa

también es una

función.

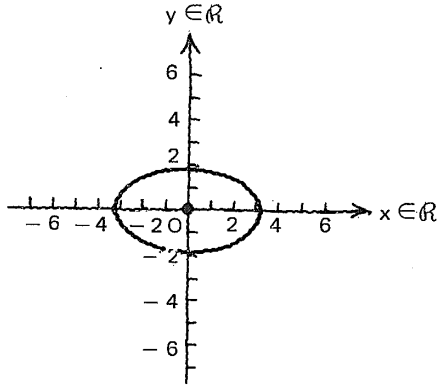
171

Ésta es la gráfica
cartesiana
de una

relación
cualquiera;

trazar la gráfica
de su
relación

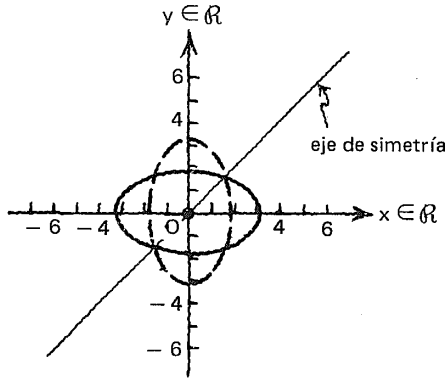
inversa.



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Observemos
que la
"gráfica inversa"
corresponde
también a una

**relación
cualquiera.**

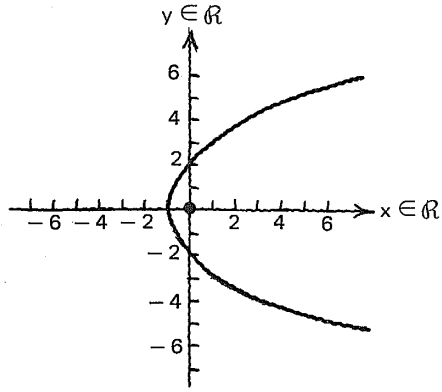


172

Ésta es la gráfica
cartesiana
de una

**relación
cualquiera;**

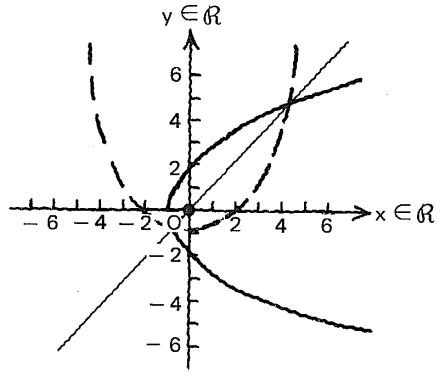
trazar la gráfica
de la
relación inversa.



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Señalar la opción correcta.
La "gráfica inversa"
corresponde
a una

relación cualquiera/función



función

173

Algunas

relaciones cualesquiera

tienen como inversa una

función.

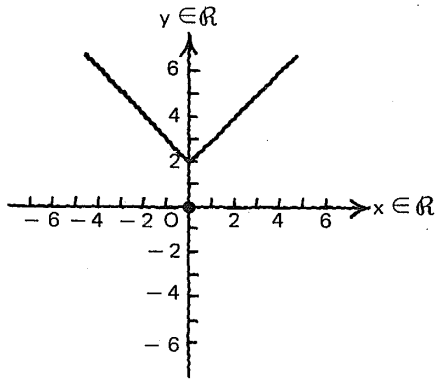
174

Ésta es la gráfica de una

función cualquiera;

trazar la gráfica de su

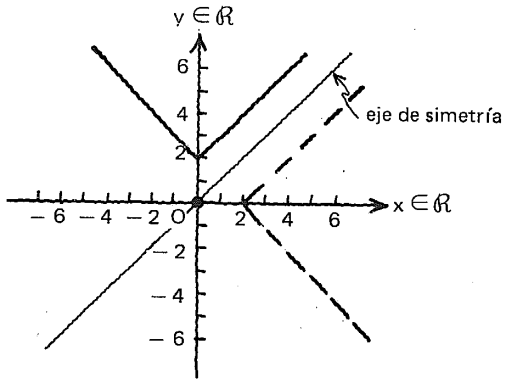
inversa.



Respuesta en el cuadro siguiente

¿La gráfica resultante corresponde a una función?

Sí/No



- No; en este caso la "gráfica inversa" corresponde a una

relación cualquiera.

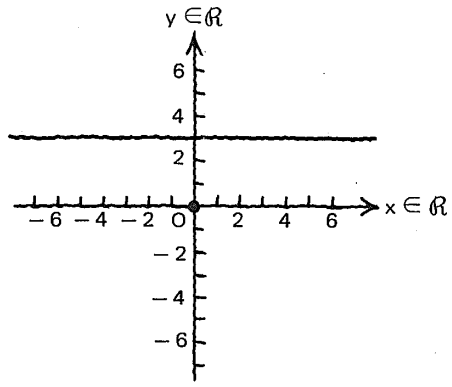
175

Ésta es la gráfica de una función

_____

suprayectiva/biyectiva

Trazar la "gráfica inversa".

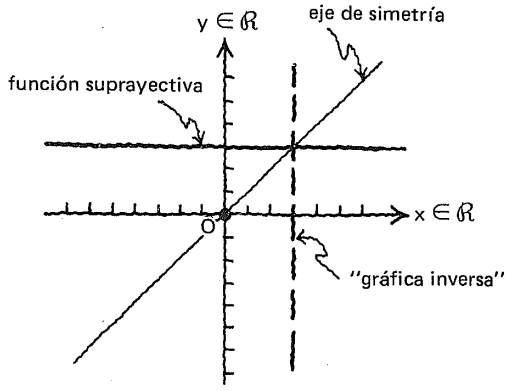


suprayectiva ("gráfica inversa" en el cuadro siguiente)

176

La gráfica resultante (gráfica inversa) ¿corresponde a una función?

Sí/No



No; en este caso la "gráfica inversa" corresponde a una

relación cualquiera.

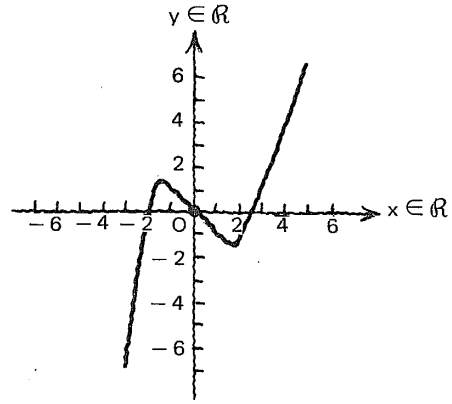
177

Ésta es la gráfica de una función

_____

suprayectiva/biyectiva

Trazar la "gráfica inversa".

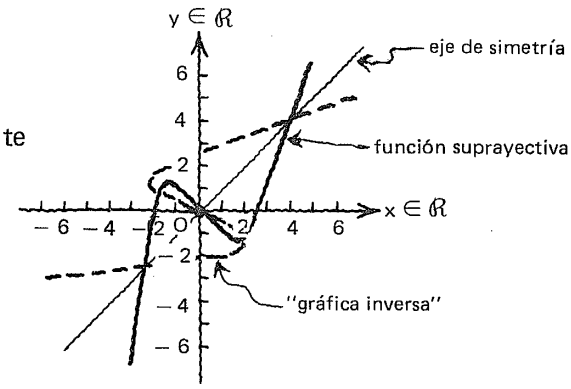


suprayectiva ("gráfica inversa" en el cuadro siguiente)

178

La gráfica resultante ("gráfica inversa") ¿corresponde a una función?

Sí/No



No; en este caso la "gráfica inversa" corresponde a una

relación cualquiera.

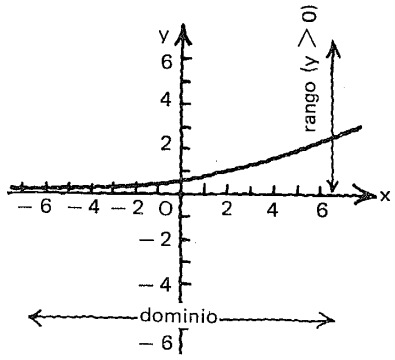
179

Ésta es la gráfica de una función

_____

suprayectiva/biyectiva

Trazar su "gráfica inversa".

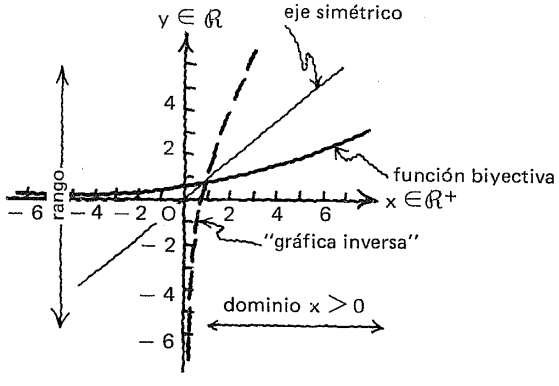


biyectiva ("gráfica inversa" en el cuadro siguiente)

180

La gráfica resultante ("gráfica inversa") ¿corresponde a una función?

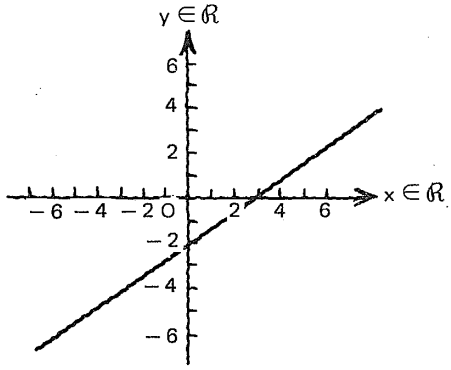
Sí/No



Sí

181

Ésta es la gráfica de una función



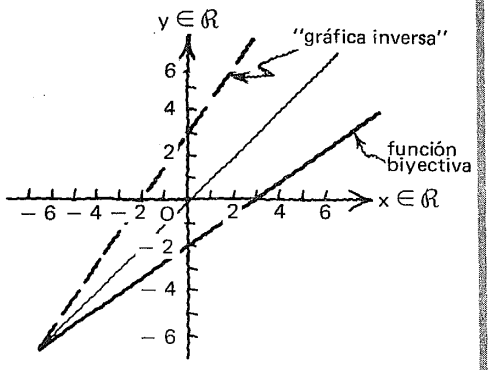
suprayectiva/biyectiva

Trazar la "gráfica inversa"

biyectiva ("gráfica inversa" en el cuadro siguiente)

182

Esta "gráfica inversa" ¿representa una función?



Sí/No

Sí

183

En síntesis:

Algunas	**relaciones cualesquiera**	tienen como inversa una	**relación cualquiera.**
Algunas	**relaciones cualesquiera**	tienen como inversa una	**función.**
Algunas	**funciones**	tienen como inversa una	**relación cualquiera.**
Algunas	**funciones**	tienen como inversa una	**función.**

184

Atención.

Para que la

inversa de una función

sea también

una función

se requiere que
la función dada sea
suprayectiva/inyectiva/biyectiva

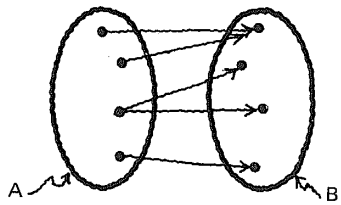
• biyectiva

(véanse los
cuadros siguientes)

185

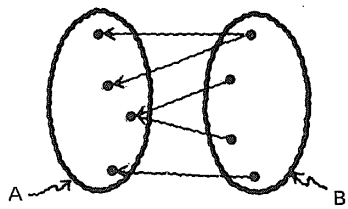
Esta gráfica representa
una **relación**

$R : A \to B$



Esta gráfica, que se obtiene
invirtiendo la dirección
de las flechas,
representa su **inversa**

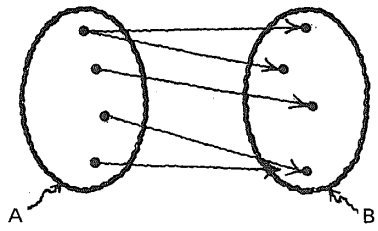
$R^{-1} : B \to A$



186

Esta gráfica representa una

[ ]



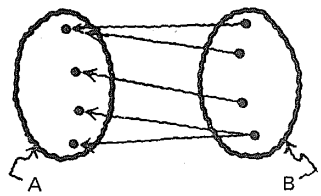
La "gráfica inversa" es

[ ]

y representa una

[ ]

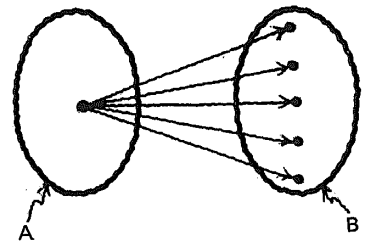
relación
cualquiera



relación
cualquiera

187

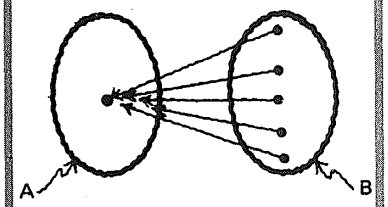
Esta gráfica representa una



La "gráfica inversa" es

y representa una

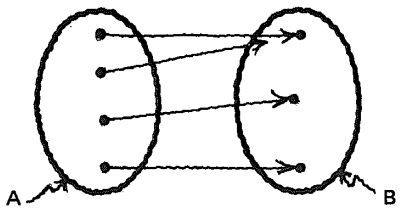
relación cualquiera



función suprayectiva

188

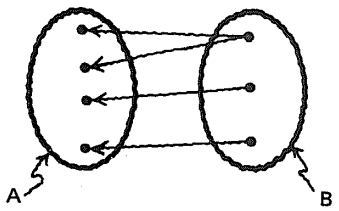
Esta gráfica representa una



La "gráfica inversa" es

y representa una

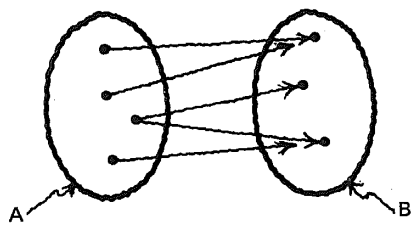
función suprayectiva



relación cualquiera

189

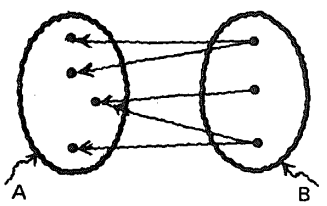
Esta gráfica representa una



La "gráfica inversa" es

y representa una

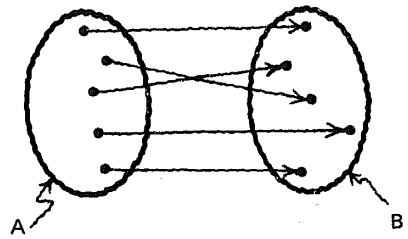
relación cualquiera



relación cualquiera

190

Esta gráfica representa una

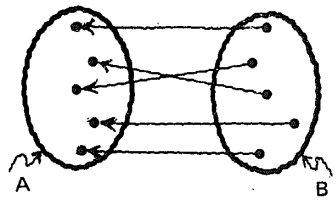


La "gráfica inversa" es

y representa una

Atención.

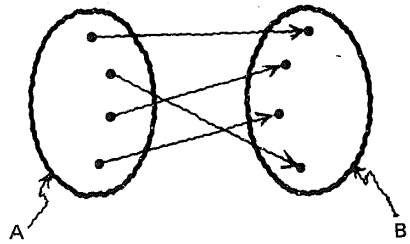
función biyectiva



función biyectiva

191

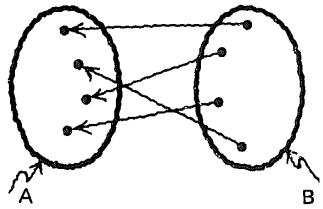
Esta gráfica representa una



La "gráfica inversa es

y representa una

función biyectiva



función biyectiva

192

Para que la inversa
de una función
sea también una función,
la función dada
debe ser

biyectiva.

193

Una

prueba de la horizontal,

similar a la

prueba de la vertical

que hemos estudiado,
puede utilizarse para
identificar una

biyección.

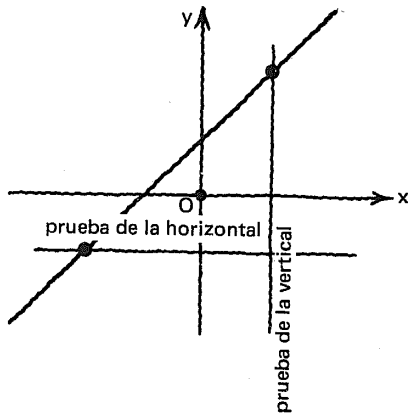
194

Si toda horizontal
trazada dentro del rango
de una función
interseca a la gráfica
en un punto y sólo uno,
entonces
la gráfica
representa una

función biyectiva

o

biyección.



195

Consideremos
de nuevo las
funciones

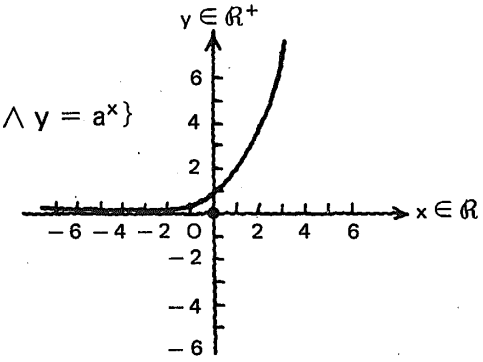
exponenciales.

196

Recordemos que
la gráfica cartesiana
de la función
exponencial

$\{(x, y)/(x, y) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+ \wedge y = a^x\}$

para $a > 1$
tiene
este aspecto ➡
y se trata de una
función **biyectiva.**
Tracemos su
"gráfica inversa".

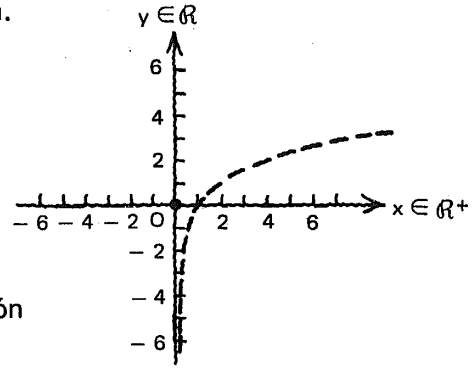


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Señalar la opción correcta.

Esta gráfica
corresponde
a una

relación cualquiera/función



función

197

Hemos visto que
para determinar la

regla de correspondencia

de la función inversa

se intercambian

las literales x e y en
la regla de correspondencia de la
función original, y

se despeja y.

198

Por ejemplo,
tenemos la regla de
correspondencia
de la función original

$$y = a^x$$

Entonces, para obtener la
regla de correspondencia de su
función inversa
intercambiamos las
literales x e y:

$x = a^y$

199

$$x = a^y$$

Despejar y:

$$y = ?$$

Aquí nos "topamos con pared".

Buscaremos una respuesta a esta
interrogante, en el módulo siguiente.

2.9.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

2.9.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la inversa de una relación, dada por enumeración de sus elementos o por comprensión;
- *trazar* la gráfica cartesiana de la inversa de una relación, a partir de la gráfica de la relación original;
- *señalar* los requisitos para que la inversa de una función sea una función;
- *trazar* la gráfica sagital de la inversa de una relación, a partir de la gráfica de la relación original;
- *trazar* la gráfica cartesiana de la inversa de una función exponencial dada.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de mayo de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100